ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №4

Спектральна обробка сигналів: процедура та приклади застосування

Мета роботи: 1) практично ознайомитися з реалізацією процедури вимірювання спектру стаціонарного випадкового процесу в середовищі Matlab; 2) змоделювати декілька прикладів застосування спектрального аналізу випадкових процесів, а саме: а) виявлення періодичного сигналу, що маскується шумом; б) вимірювання частот адитивної суміші кількох гармонічних коливань; в) вимірювання частоти основного тону голосового сигналу.

Робоче завдання

1. **Змоделювати задачу виявлення періодичного сигналу, що маскується шумом, за умов:** а) є апріорна інформація, що СВП $Y(t)$ являє собою адитивну суміш гармонічного процесу $S(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ з невідомими амплітудою A, частотою f_0 (значення якої знаходиться в межах 80-220 Гц), випадковою фазою, рівномірно розподіленою на інтервалі $[0,2\pi]$, та гаусівского білого шуму в смузі частот 0 – 5 кГц; б) відношення сигнал-шум цієї суміші дорівнює $\rho_{вх}$.
   - Змоделювати в середовищі Matlab адитивну суміш із заданими параметрами;
   - Розрахувати об'єм N експериментальної вибірки відліків згенерованої суміші, що необхідна для забезпечення відношення сигнал-шум $\rho_{вих} = 10\,дБ$ на виході цифрового спектроаналізатора, що обчислює періодограму;
   - Обчислити та побудувати графіки різних оцінок спектру СВП $Y(t)$: а) перідограма; б) оцінка Бартлета; в) оцінка Уелча із 50% перекриттям сегментів; г) авторегресійний метод Юла—Уолкера
   - Обчислити та побудувати графіки тих самих оцінок спектру СВП $Y(t)$ за умов збільшення N в 100 разів, при довжині сегменту N_1, що дорівнює "старому" значенню N
2. **Здійснити спектральний аналіз сумиіші двох гармонічних коливань (без фонового шуму) за умов:** а) частота першого коливання $f_{01} = f_0$, частота другого коливання $f_{02} = f_0 + 5\Delta f$, де $\Delta f = 1/T = 2B/N$; б) потужності обох гармонік однакові; в) N =1024.
3. **Здійснити натурний експеримент з вимірювання частоти основного тону голосового сигналу із** застосуванням спектрального аналізу.
   - Використовуючи попередні записи слова та його фрагменту, ввести їх в робочий простір програми **sptool**;
   - здійснити спектральний аналіз із наступним вимірюванням частоти основного тону: а) перідограма; б) оцінка Бартлета; в) оцінка Уелча із 50% перекриттям сегментів; г) авторегресійний метод Юла—Уолкера

Таблиця 1. Варіанти значень числових параметрів

Варіант		1	2	3	4	5	6	7	8
	$\rho_{вх}$	-10	-11	-12	-13	-14	-15	-16	-17
	f_0	80	100	120	140	160	180	200	220
	слово	ананас	конфетка	молоток	коробка	таблетка	корзина	барабан	барбарис

Оформити звіт за результатами експериментальних досліджень та аналітичних розрахунків за пп.1-3 даного робочого завдання (припустимо оформляти один звіт на бригаду).

Контрольні запитання

1. Як спектр потужності випадкового процесу пов'язаний із автокореляційною функцією цього процесу?
2. Як можна оцінити спектр потужності випадкового процесу?
3. Що таке «сира періодограма» та в чому її головний недолік?
4. Що являють собою оцінки Барлета та Уелча, в чому їх переваги та недоліки порівняно із сирою періодограмою?
5. Що таке параметричні оцінки спектра та в чому їх перевага над непараметричними оцінками?

Додаток 1

Допоміжні відомості для роботи з програмою Matlab

1. Введення числових значень параметрів

Для автоматизації виконання даної лабораторної роботи введіть в робочий простір програми Matlab числові значення параметрів відповідно до Таблиці 1. Для цього скопіюйте строку із даними свого варіанту в командне вікно програми Matlab та натисніть клавішу **Enter**.

```
Rvh = -10; f0 = 80; B = 5000;      % 1-й варіант
Rvh = -11 f0 = 100; B = 5000;      % 2-й варіант
Rvh = -12; f0 = 120; B = 5000;     % 3-й варіант
Rvh = -13; f0 = 140; B = 5000;     % 4-й варіант
Rvh = -14; f0 = 160; B = 5000;     % 5-й варіант
Rvh = -15; f0 = 180; B = 5000;     % 6-й варіант
Rvh = -16; f0 = 200; B = 5000;     % 7-й варіант
Rvh = -17; f0 = 220; B = 5000;     % 8-й варіант
```

2. Моделюваня задачі виявлення періодичного сигналу, що маскується шумом

Для адитивної суміші

$$Y(t) = S(t) + \xi(t) \tag{1}$$

сигналу $S(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ та шуму $\xi(t)$ вхідне відношення сигнал-шум:

$$\rho_{вх} = \frac{A^2/2}{D_\xi},$$

або у децибелах:

$$\rho_{вх\,дб} = 10\lg\frac{A^2/2}{D_\xi}.$$

Якщо приймемо $D_\xi = 1$, тоді параметр A дорівнює:

$$A = 10^{\frac{10\lg 2 + \rho_{вх.дб}}{20}}.$$

Відповідні команди Matlab:

```
%== обчисл.амплітуди A сигналу Y(t) ========
%
Dksi = 1;              % дисперс.шуму
A = 10^((10*log10(2)+Rvh)/20)      % амплітуда сигналу (відобр.в командному вікні)
```

Для варіанту 8 одержуємо $A = 0.1998$

В лабораторній роботі №3 було побудовано графік фрагменту процесу $Y(t)$, на якому сигнал не спостерігається. Крім того, в тій же роботі було показано, що кореляційний аналіз процесу $Y(t)$ дозволяє виявити періодичний сигнал $S(t)$ на тлі шуму $X(t)$.

Покажемо тепер, что спектральний аналіз випадкового процесу допомагає вирішити задачу виявлення періодичного сигналу на тлі шуму.

Оскільки складові частини процесу $Y(t)$ статистично незалежні, враховуючи співвідношення Вінера-Хінчіна

$$P(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)\exp(-j2\pi f\tau)d\tau,$$

одержуємо

$$P_Y(f) = P_S(f) + P_\xi(f), \tag{2}$$

де

$$P_S(f) = \frac{A^2}{4}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right], \quad P_\xi(f) = \frac{N_0}{2}rect\left(\frac{f}{2B}\right) = \frac{D_\xi}{2B}rect\left(\frac{f}{2B}\right), \tag{3}$$

B - верхня гранична частота шуму $\xi(t)$.

***Контрольне запитання**: доведіть справедливість співвідношень (2) та (3), спираючись на відомі вам формули кореляційних функцій гармонічного сигналу та білого шуму, обмеженого за частотою.*

Графік спектру суміші (2) побудувати неможливо, оскільки спектр необмеженого в часі гармонічного сигналу складається з двох дельта-функцій, що приймають безкінечно великі значення при $f = \pm f_0$ (рис.1).

На практиці завжди маємо відрізок, довжиною T, реалізації випадкового процесу. Тому замість спектру потужності на практиці оперуємо із ***оцінкою*** спектру:

$$\overline{P}(f) = \int_{-T}^{T} \overline{K}(\tau)\exp(-j2\pi f\tau)d\tau = \frac{|F_T(f)|^2}{T},$$

$$F_T(f) = \int_0^T X(t)\exp(-j2\pi ft)dt.$$

Можна показати, що математичне чекання відповідної оцінки відрізку гармонічного процесу має вигляд:

$$\langle \overline{P}_S(f) \rangle = \frac{A^2T}{4}\left\{Sa^2[\pi(f-f_0)T] + Sa^2[\pi(f+f_0)T]\right\} \tag{4}$$

Тепер маємо ситуацію, максимально наближену до реальності, що дозволяє обчислити відношення сигнал-шум на виході спектроаналізатору. Якщо за сигнал на виході спектроаналізатору прийняти висоту піку математичного чекання (4), а за шум - математичне чекання рівня спектру шуму (насправді за рівень шуму приймають не рівень спектру шуму, а середньоквадритчну похибку оцінки спектра шуму – але можна показати, що для оцінки у вигляді періодограми ці два різні визначення відношення сигнал-шум співпадають), маємо:

$$\rho_{вих.сп} = \rho_{вх} \cdot TB, \tag{5}$$

тобто виграш у відношенні сигнал-шум за рахунок спектрального аналізу сягає величини

$$\frac{\rho_{вих.сп}}{\rho_{вх}} = TB. \tag{6}$$

Звідси

$$10\log TB = \rho_{вих.сп\log} - \rho_{вх\log},$$

$$TB = 10^{0.1(\rho_{вих.сп\log} - \rho_{вх\log})}.$$

Обрахувавши TB та враховучи, що за теоремою Котельнікова неперервний процес можна дискретизувати з кроком $\Delta t = 1/2B$, одержуємо корисну для планування експерименту формулу, що дозволяє обрахувати потрібну кількість відліків процесу:

$$N = \frac{T}{\Delta t} = 2TB = 2\cdot 10^{0.1(\rho_{вих.сп\log} - \rho_{вх\log})}$$

Побудуємо графіки оцінки спектру суміші та її математичного чекання. Зробимо це за два кроки.

Крок 1. Формування адитивної суміші гармонічного процесу та білого шуму

```
Rvyh = 10;
TB = 10^(0.1*(Rvyh-Rvh));
N = ceil(2*TB)     % кількість відліків процесу
%== сигнал плюс шум ===============
%
fi = rand(1)*2*pi;          % випадкова початкова фаза
f0B = f0/B;               % відносна частота сигналу
i = 1: N;
S = A*cos(pi*f0B*i+fi);       % N відліків сигналу
ksi = randn(1, N);            % N відліків шуму
Sksi = S + ksi;                % N відліків суміші
subplot(3,1,1); plot(i,S);        % графік сигналу
title('Сигнал');
subplot(3,1,2); plot(i,ksi);        % графік шуму
title('Шум');
subplot(3,1,3); plot(i,Sksi,'r');        % графік суміші
title('Сигнал плюс шум');
```

Графіки процесів показано на рис.1.

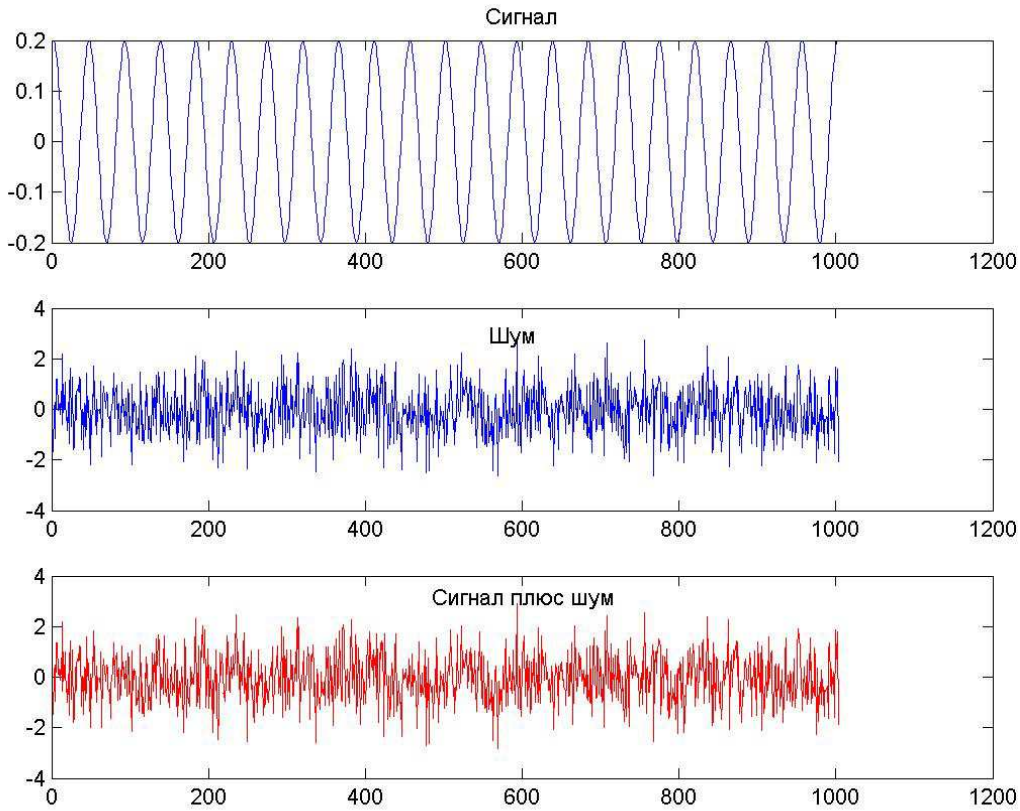

Рис.1

Крок 2. Обчислення періодограми.

```
%=== періодограма =========
figure;
nfft = N; fs = 2*B; window = boxcar(N);
[Psksi,f1] = periodogram(Sksi,window,nfft,fs);
subplot(4,1,1); plot(f1,Psksi);
title('періодограма, лінійн.масштаб');
subplot(4,1,3); plot(f1,10*log10(Psksi));
title('періодограма, логар.масштаб');
% ==== матем.чекан. =========
f = 0:2*B/N:B;
Pksi = 1/B*rectpuls(f,2*B);
Ps = A^2*N/(4*B)*(sinc((f-f0)*N/2/B)).^2;
Psum = Pksi + Ps;
subplot(4,1,2); plot(f, Psum,'r');
title('мат.чекан., лінійн.масштаб');
subplot(4,1,4); plot(f, 10*log10(Psum),'r');
title('мат.чекан., логар.масштаб');
```

На рис.2 показані графіки оцінок спектрів та їх математичних чекань.

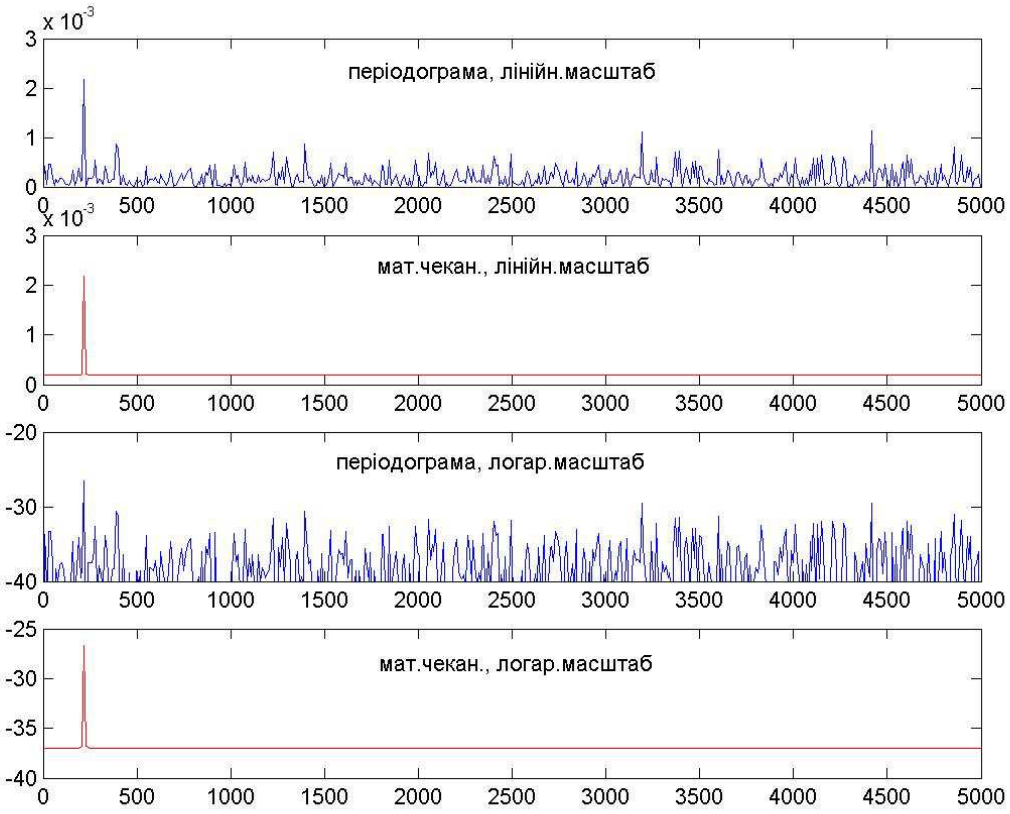

Рис.2

***Контрольні запитання**: 1) чому спектр гармонічного сигналу видно недосить добре на тлі спектру шуму, хоча відношення сигнал шум дорівнює 10 дБ? 2) чому гармонічний сигнал гірше спостерігається на графіку періодограми в логаріфмічному масштабі?*

Розглянемо тепер такі різновиди оцінок спектру, що дають змогу зменшити дисперсію оцінки спектру білого шуму – це: а) оцінка Бартлета; в) оцінка Уелча із 50% перекриттям сегментів; г) авторегресійний метод Юла—Уолкера.

Вагові функції (вікна)

В даній лабораторній роботі **для оцінки Уелча вам слід використати свій варіант вікна**, що вказаний в таблиці 1.

Таблиця 1.

№ варіанту	**Вікно**	**Синтаксис**
1	Прямокутне	Window = boxcar (N_1)
2	Трикутне	Window = triang (N_1)
3	Бартлета	Window = bartlett (N_1)
4	Блекмена	Window = blackman (N_1, ‘symmetric’)
5	Чебишева (40db)	Window = chebyshev (N_1, 40)
6	Хемінга	Window = hamming (N_1, ‘symmetric’)
7	Хана (Хенінга)	Window = hanning (N_1, ‘symmetric’)
8	Кайзера (beta = 6)	Window = kaiser (N_1, 6)

```
%=== оцінки спектру =====
% ==== періодограма =========
figure;
nfft = N; fs = 2*B; window = boxcar(N);
```

```
[Pmod,f1] = periodogram(Sksi,window,nfft,fs);
subplot(4,1,1); plot(f1,Pmod);
title('періодограма, лін.масшт.');
%======= оцінка Бартлета =======
N1 = ceil(N/8);
nfft = N1; window = boxcar (N1); noverlap = 0;
[Pbart,f1] = pwelch(Sksi,window,noverlap,nfft,fs);
subplot(4,1,2); plot(f1,Pbart);
title('оц.Бартлета, лін..масшт.');
%======= оцінка Уелча =======
N1 = ceil(N/8);
nfft = N1; window = kaiser(N1,6); noverlap = ceil(N1/2);  % вікно Кайзера з перекрит. 50%.
[Pwelc,f1] = pwelch(Sksi,window,noverlap,nfft,fs);
subplot(4,1,3); plot(f1,Pwelc);
title('оц. Уелча, лін..масшт.');
%======= оцінка Юла-Уолкера =======
nfft = N;
p = 40;
[Pyul,f1] = pyulear(Sksi,p,nfft,fs);
subplot(4,1,4); plot(f1,Pyul);
title('оц. Юла-Уолкера, лін..масшт.');
```

Результати спектрального оцінювання показані на рис.3.

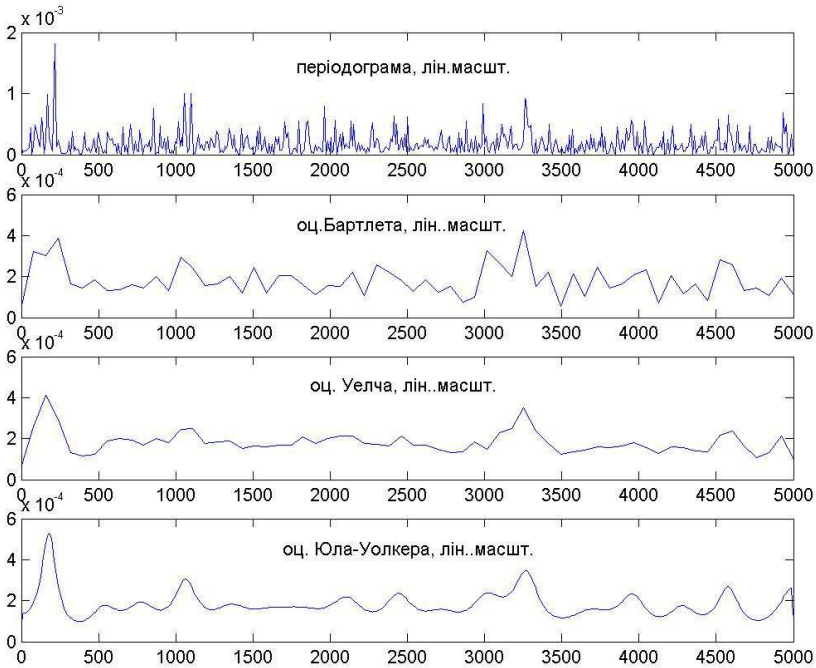

Рис.3

***Контрольні запитання**: прокоментуйте рис.3*

Збільшимо N в 100 разів, а довжину сегменту N_1 зробимо рівній "старому" значенню N :

```
 %== сигнал плюс шум ===============
%
fi = rand(1)*2*pi;          % випадкова початкова фаза
f0B = f0/B;                % відносна частота сигналу
N=100*N;
i = 1:N;
S = A*cos(pi*f0B*i+fi);        % N відліків сигналу
ksi = randn(1, N);             % N відліків шуму
Sksi = S + ksi;                 % N відліків суміші
%=== оцінки спектру =====
% ==== періодограма =========
```

```
figure;
nfft = N; fs = 2*B; window = boxcar(N);
[Pmod,f1] = periodogram(Sksi,window,nfft,fs);
subplot(4,1,1); plot(f1,Pmod);
title('періодограма, лін.масшт.');
%======= оцінка Бартлета =======
N1 = ceil(N/100);
nfft = N1; window = boxcar (N1); noverlap = 0;
[Pbart,f1] = pwelch(Sksi,window,noverlap,nfft,fs);
subplot(4,1,2); plot(f1,Pbart);
title('оц.Бартлета, лін..масшт.');
%======= оцінка Уелча =======
N1 = ceil(N/100);
nfft = N1; window = kaiser(N1,6); noverlap = ceil(N1/2);  % вікно Кайзера з перекрит. 50%.
[Pwelc,f1] = pwelch(Sksi,window,noverlap,nfft,fs);
subplot(4,1,3); plot(f1,Pwelc);
title('оц. Уелча, лін..масшт.');
%======= оцінка Юла-Уолкера =======
nfft = N;
p = 40;
[Pyul,f1] = pyulear(Sksi,p,nfft,fs);
subplot(4,1,4); plot(f1,Pyul);
title('оц. Юла-Уолкера, лін..масшт.');
```

Результати оцінювання наведені на рис.4.

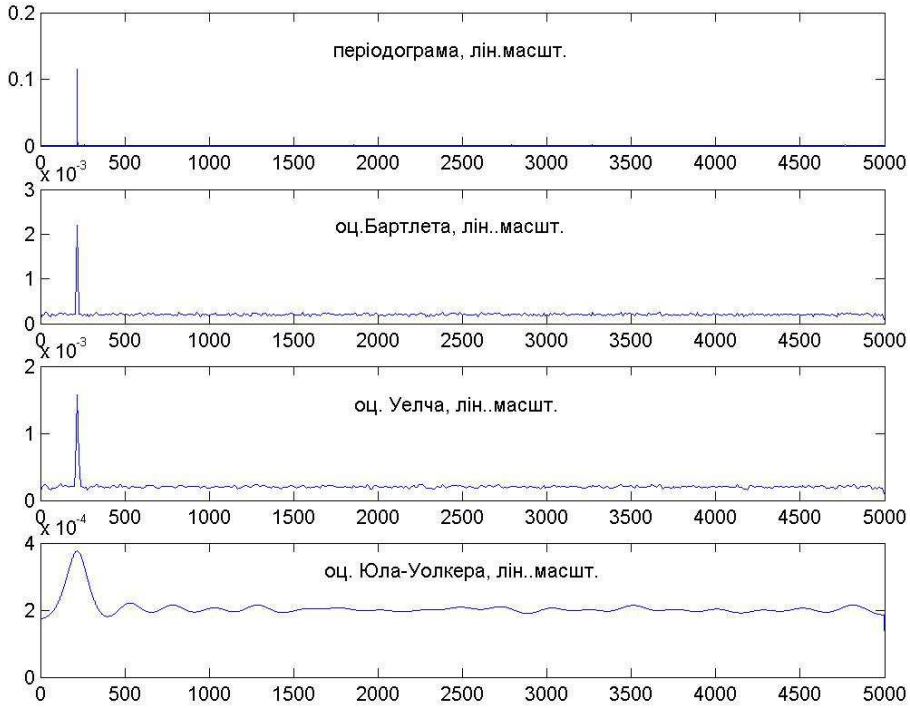

Рис.4

***Контрольні запитання**: прокоментуйте рис.4, у порівнянні із рис.3*

2. Спектральний аналіз суміші двох гармонічних коливань

```
N = 1024;
f01 = f0;
f02 = f0 + 5*(2*B)/N;
k = 1:N;
Sksi = cos(2*pi*f01*k/(2*B))+ cos(2*pi*f02*k/(2*B));
% ==== періодограма =========
figure;
```

```
nfft = N; fs = 2*B; window = boxcar(N);
[Pmod,f1] = periodogram(Sksi,window,nfft,fs);
subplot(4,1,1); plot(f1(1:48),Pmod(1:48));
title('періодограма, лін.масшт.');
%======= оцінка Бартлета =======
N1 = ceil(N/8);
nfft = N1; window = boxcar (N1); noverlap = 0;
[Pbart,f1] = pwelch(Sksi,window,noverlap,nfft,fs);
subplot(4,1,2); plot(f1(1:6),Pbart(1:6));
title('оц.Бартлета, лін..масшт.');
%======= оцінка Уелча =======
N1 = ceil(N/8);
nfft = N1; window = kaiser(N1,6); noverlap = ceil(N1/2);  % вікно Кайзера з перекрит. 50%.
[Pwelc,f1] = pwelch(Sksi,window,noverlap,nfft,fs);
subplot(4,1,3); plot(f1(1:6),Pwelc(1:6));
title('оц. Уелча, лін..масшт.');
%======= оцінка Юла-Уолкера =======
nfft = N;
p = 40;
[Pyul,f1] = pyulear(Sksi,p,nfft,fs);
subplot(4,1,4); plot(f1(1:48),Pyul(1:48));
title('оц. Юла-Уолкера, лін..масшт.');
```

Результати спектрального аналізу показані на рис.5.

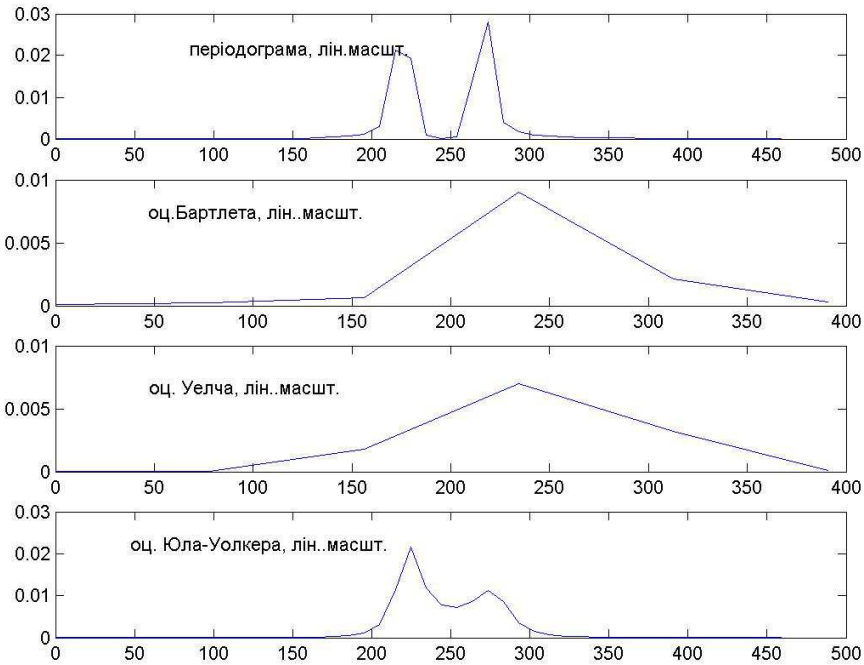

Рис.5

***Контрольні запитання**: прокоментуйте рис.5*

3. Вимірювання частоти основного тону голосового сигналу із застосуванням спектрального методу

Активізуйте програму **sptool** та експортуйте в її робочий простір сигнал, що відповідає цілому слову та окремому голосному звуку із нього.

Обчисліть (в середовищі програми **sptool**) ті ж чотири різновиди оцінок спектру: періодограму, оцінку Бартлета, оцінку Уелча, оцінку Юла-Уолкера.

Параметр **Nfft** для оцінки у вигляді періодограми обчисліть за формулою:

$$Nfft = (t_2 - t_1)F_д,$$

де t_1 і t_2 - моменти початку та кінця фрагменту (t_1=0); $F_д$=11025 Гц.

Наприклад, для варіанту 8 було одержано t_2 =0.202 с, тому Nfft = 2227.

Приклад періодограми для варіанту 8 наведено на рис.6. На цьому рисунку бачимо два спектральних піки на частотах 138.6 Гц та 277 Гц – **таким чином, оцінка частоти основного тону дорівнює 138.6 Гц**

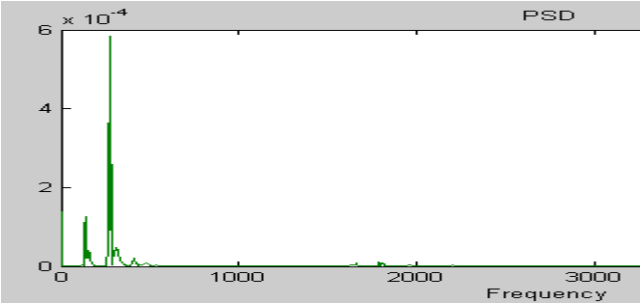

Рис.6

Оцінку Барлета для значення параметру $N_1 = Nfft = 256$ показано на рис.7. На цьому рисунку бачимо два спектральних піки на частотах 129 Гц та 258 Гц – **таким чином, оцінка частоти основного тону дорівнює 129 Гц.**

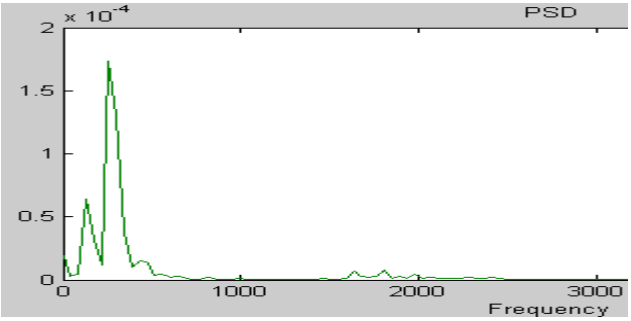

Рис.7

Оцінку Уелча для значення параметру $N_1 = Nfft = 256$, з вікном Кайзера та 50% перекриттям показано на рис.8. На цьому рисунку бачимо два спектральних піки на частотах 129 Гц та 258 Гц – **таким чином, оцінка частоти основного тону дорівнює 129 Гц.**

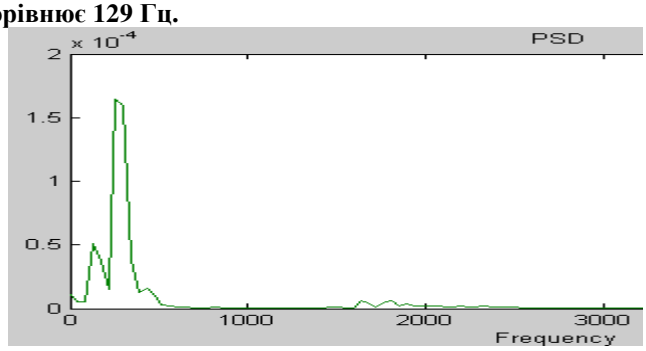

Рис.8

Оцінку Юла-Уолкера для значення параметру Nfft = 2227 та порядку p = 50 показано на рис.9 (для значень порядку p = 80). На цьому рисунку бачимо два спектральних піки на частотах 138.6 Гц та 287 Гц – **таким чином, оцінка частоти основного тону дорівнює 138.6 Гц.**

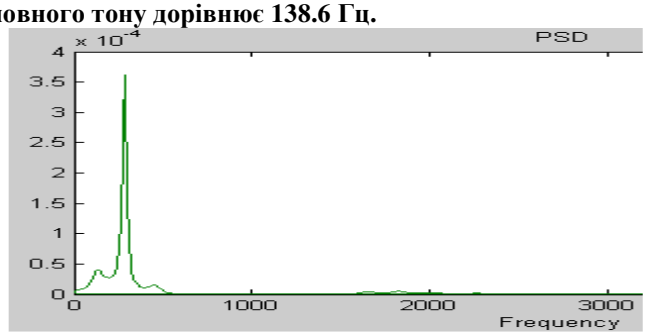

Рис.9

***Контрольні запитання**: прокоментуйте одержані результати.*

Додаток 2

Стислі теоретичні відомості

1. Непараметричні оцінки спектру

Періодограмою (periodogram) називається оцінка спектральної густини потужності:

$$\tilde{P}_m = \frac{1}{F_\partial N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} X_n \exp(-j\frac{2\pi}{N}nm)\right|^2$$

Якщо при обчисленнях спектру викристовується вагова функція (вікно) w_n, $n = 0,\ldots,N-1$, одержана оцінка спектру називається ***модифікованою періодограмою*** (modified periodogram):

$$\tilde{P}_m = \frac{1}{F_\partial NU}\left|\sum_{n=0}^{N-1} X_n w_n \exp(-j\frac{2\pi}{N}nm)\right|^2,$$

$$U = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} w_n^2$$

Можна показати, що **періодограма не є слушною оцінкою** спектру, оскільки *дисперсія* такої оцінки співставима із квадратом її математичного чекання при довільному *N*:

$$\frac{D[\tilde{P}_m]}{\langle \tilde{P}_m \rangle^2} = \begin{cases} 2 & при \quad m = 0 \\ 1 & при \quad m \neq 0 \end{cases}, \quad N \to \infty$$

Бартлетт (Bartlett) запропонував разділяти сигнал на сегменти, що не перекрываються, обчислювати для кожного сегменту періодограму і потім ці періодограми усереднювати (рис.10).

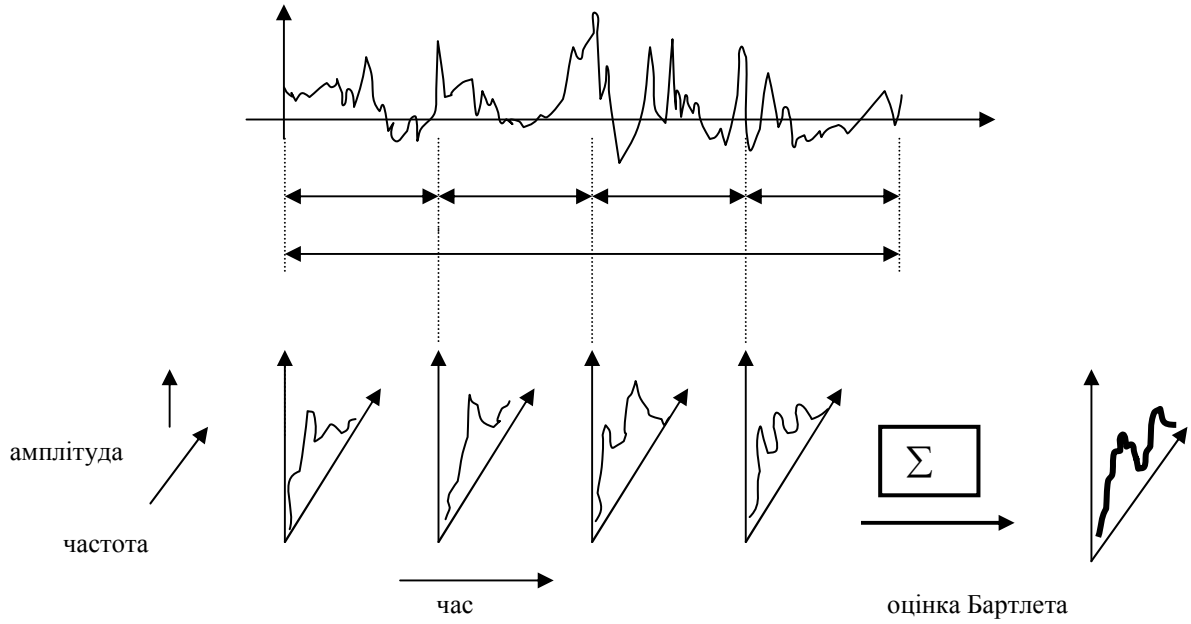

Рис.10

Уэлч (Welch) вніс в метод Бартлета два удосконалення: використання вагової функції й розбиття сигналу на сегменти, що *перекриваються*. Застосування вагової функції дозволяє ослабити розтікання спектру й зменшити зміщення оценки спектру ціною незначного погіршення разрішаючої здатності. Перекриття сегментів дозволяє зменшити дисперсію оцінки.

2. Обчислення непараметричних оцінок спектру в Matlab'і

В пакеті Signal Processing програми Matlab реалізовані три методи непараметричного оцінювання спектру — періодограма, метод Уелча й метод Томсона (MTM).

Обчислення періодограмми (в тому числі модифікованої) здійснюється за допомогою функції **periodogram,** синтаксис котрої має вигляд:

[Pxx,f] = periodogram(x,window,nfft,fs)

де вхідні дані - масив **x** відліків СВП, масив відліків вікна **window**, число точок БПФ **nfft**, частота дискретизації **fs**; вихідні дані – масиви значень перідограми **Pxx** та її аргумента **f**.

Метод Уелча є найбільш популярним періодограмним методом спектрального аналізу. В пакете Signal Processing він реалізується за допомогою функції **pwelch**:

[Pxx,f] = pwelch(x,window,noverlap,nfft,fs),

де **noverlap –** число відліків, що перекрываються.

3. Параметричні методи

Використання параметричних методів означає наявність математичної *моделі* випадкового процесу, що аналізується, а саме: СВП представляють як результат проходження білого шуму через фільтр (рис.11).

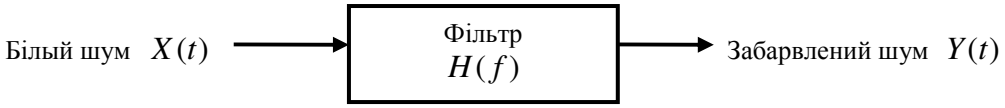

Рис.11

Оскільки спектри СВП вхідного й вихідного процесів лінійної системи пов'язані співвідношенням:

$$S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f),$$

для випадку білого шуму на вході, тобто $S_x(f) = \sigma^2$, маємо

$$S_y(f) = |H(f)|^2 \sigma^2.$$

Таким чином, задачу вимірювання спектру потужності процесу $Y(t)$ можна підмінити задачею вимірювання АЧХ деякого фільтру й потужності σ^2 білого шуму $X(t)$ на його вході.

Оскільки цифрові фільтри прийнято ділити на три типи, - нерекурсивні, рекурсивні й авторегресивні, - одержуєм три моделі процесу $Y(t)$:

1) *ковзаючого середнього* (КС);
2) *авторегресії ковзаючого середнього* (АРКС);
3) *авторегресії* (АР).

Спектральний аналіз зводиться в даному випадку до рішення оптимізаційної задачі, тобто до пошуку таких *параметрів* моделі, при яких вона найбільш близька до реального сигналу. В Matlab, в пакеті Signal Processing, реалізовані декілька авторегресійних оцінок спектру, а також оцінки, що базуються ще на двух методах, - на аналізі власних чисел й векторів кореляційної матриці сигналу: MUSIC (MUltiple SIgnal Classification) і EV (EigenVectors). ***В данній лабораторній роботі ми знайомимося тільки із авторегресійними оцінками спектру потужності ССП.***

4. Реалізація обчислень в пакеті Matlab

Кожному методу авторегресійного аналізу в пакеті Signal Processing відповідають дві функції — функція обчислення коефіцієнтів моделі й функція власне спектрального аналізу. Функція спектрального аналізу викликає функцію обчислення коефіцієнтів моделі, а потім виконує обчислення спектру. Імена функцій зведено в наступну таблицю.

Метод	**Функція розрахунку коефіцієнтів моделі**	**Функція спектрального аналізу**
Коваріаційний	**arcov**	**pcov**
Модифікований коваріаційний	**armcov**	**pmcov**
Берга	**arburg**	**pburg**
Авторегресійний Юла—Уолкера	**aryule**	**pyulear**

Синтаксис функцій спектрального аналізу дуже схожий. Для авторегресійної оцінки Юла-Уолкера:

[Pxx,f] = pyulear(x,p,nfft,fs)

де **p** – порядок моделі. Інші позначення співпадають з такими для непараметричних оцінок спектру.