

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3

Кореляційна обробка сигналів: процедура та приклади застосування

Мета роботи: 1) практично ознайомитися з реалізацією процедури вимірювання автокореляційної функції в середовищі Matlab; 2) змодельовати декілька прикладів застосування кореляційного аналізу випадкових процесів, а саме: а) виявлення періодичного сигналу, що маскується шумом; б) вимірювання частоти основного тону голосового сигналу.

Робоче завдання

- Змодельовати задачу виявлення періодичного сигналу, що маскується шумом, за умов:** а) є апріорна інформація, що СВП $Y(t)$ являє собою адитивну суміш гармонічного процесу $S(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ з невідомими амплітудою A , частотою f_0 (значення якої знаходиться в межах 100-500 Гц), випадковою фазою, рівномірно розподіленою на інтервалі $[0, 2\pi]$, та гаусівського білого шуму в смузі частот 0 – 5 кГц; б) відношення сигнал-шум цієї суміші дорівнює $\rho_{\text{вх}}$.
 - Змодельовати в середовищі Matlab адитивну суміш із заданими параметрами та побудувати її графік;
 - Побудувати графік функції кореляції згенерованої суміші;
 - Розрахувати об'єм N експериментальної вибірки відліків згенерованої суміші, що необхідна для забезпечення відношення сигнал-шум $\rho_{\text{вих}} = 10 \text{ дБ}$ на виході корелятора.
 - Обчислити та побудувати графіки оцінки автокореляційної функції СВП $Y(t)$
- Здійснити натурний експеримент з вимірювання частоти основного тону голосового сигналу із застосуванням автокореляційного методу.**
 - Використовуючи телефонну гарнітуру та програму Matlab, ввести голосовий сигнал в комп'ютер, заздалегідь вибравши частоту дискретизації;
 - Виділити фрагменти введенного голосового сигналу, що відповідають голосним звукам, та здійснити їх автокореляційний аналіз із наступним вимірюванням частоти основного тону;

Таблиця 1. Варіанти значень числових параметрів

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8
$\rho_{\text{вх}}$	-10	-11	-12	-13	-14	-15	-16	-17
f_0	80	100	120	140	160	180	200	220
слово	ананас	конфетка	молоток	коробка	таблетка	корзина	барабан	барбарис

Оформити звіт за результатами експериментальних досліджень та аналітичних розрахунків за пп.1-3 даного робочого завдання (припустимо оформляти один звіт на бригаду).

Контрольні запитання

1. Що таке гаусівський білий шум?
2. Що таке адитивна суміш сигналу та шуму?
3. Як виглядають автокореляційні функції гармонічного сигналу та шуму? Чому вони так виглядають?
4. Чому оцінка автокореляційної функції відрізняється від самої авто кореляційної функції?
5. Яку оцінку автокореляційної функції використано в даній роботі – зміщену чи незміщену? Чим незміщена оцінка краща від зміщеної? Чим незміщена оцінка гірша від зміщеної?
6. Чому застосування автокореляційної обробки адитивної суміші періодичного сигналу та білого шуму дозволяє підвищити відношення сигнал-шум?
7. При вирішенні яких задач доцільно застосувати автокореляційну обробку?

Допоміжні відомості для роботи з програмою Matlab

1. Введення числових значень параметрів

Для автоматизації виконання даної лабораторної роботи введіть в робочий простір програми Matlab числові значення параметрів відповідно до Таблиці 1. Для цього скопіюйте строку із даними свого варіанту в командне вікно програми Matlab та натисніть клавішу **Enter**.

```
Rvh = -10; f0 = 80;    % 1-й варіант
Rvh = -11; f0 = 100;   % 2-й варіант
Rvh = -12; f0 = 120;   % 3-й варіант
Rvh = -13; f0 = 140;   % 4-й варіант
Rvh = -14; f0 = 160;   % 5-й варіант
Rvh = -15; f0 = 180;   % 6-й варіант
Rvh = -16; f0 = 200;   % 7-й варіант
Rvh = -17; f0 = 220;   % 8-й варіант
```

2. Моделювання задачі виявлення періодичного сигналу, що маскується шумом

Для адитивної суміші

$$Y(t) = S(t) + \xi(t) \quad (1)$$

сигналу $S(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ та шуму $\xi(t)$ відношення сигнал-шум – це відношення середньої потужності (дисперсії) $A^2/2$ сигналу до середньої потужності (дисперсії) D_ξ шуму:

$$\rho_{\text{ex}} = \frac{A^2/2}{D_\xi}$$

Контрольне запитання: доведіть, що середня потужність (дисперсія) сигналу дорівнює $A^2/2$

Це відношення можна виразити у децибелах:

$$\rho_{\text{ex db}} = 10 \lg \frac{A^2/2}{D_\xi}.$$

Контрольне запитання: чому тут $10 \lg$, а не $20 \lg$?

Для генерування відліків процесу $Y_i = Y(t_i) = Y(i \cdot \Delta t)$ із заданим відношенням сигнал-шум можна довільно задати A або D_ξ - інший параметр при цьому обчислюється через ρ_{ex} . Наприклад, якщо приймемо $D_\xi = 1$, тоді параметр A дорівнює:

$$A = 10^{\frac{10 \lg 2 + \rho_{\text{ex}}}{20}}.$$

Контрольне запитання: доведіть справедливості цієї формули

Відповідні команди Matlab:

```
%== обчисл.амплітуди A сигналу Y(t) =====
%
Dksi = 1;          % дисперс.шуму
A = 10^((10*log10(2)+Rvh)/20) % амплітуда сигналу (відобр.в командному вікні)
```

Для варіанту 8 $A = 0.1998$ (**Увага! Запишіть значення A для вашого варіанту**)

Побудуємо графіки процесу (1).

Позначимо $t = i \cdot \Delta t$, $\tau = j \cdot \Delta t$, та виберемо $\Delta t = 1/2B$, де B - верхня гранична частота білого шуму у смузї $[0, B]$ Гц.

```
%== сигнал плюс шум (3 періоди гарм.сигналу)====
%
B = 5000;          % верхн.гранична частота шуму
fi = rand(1)*2*pi; % випадкова початкова фаза
f0B = f0/B;        % відносна частота сигналу
Ngraf = ceil(3/f0B)*2+1
i = 1: Ngraf;
S = A*cos(pi*f0B*i+fi); % Ngraf відліків сигналу
ksi = randn(1, Ngraf); % Ngraf відліків шуму
Sksi = S + ksi;        % Ngraf відліків суміші
```

```
subplot(3,1,1); plot(i,S); % графік сигналу
title('Сигнал');
subplot(3,1,2); plot(i,ksi); % графік шуму
title('Шум');
subplot(3,1,3); plot(i,Sksi,'r'); % графік суміші
title('Сигнал плюс шум');
```

На рис.2 показано графіки адитивної суміші сигналу с шумом. Як бачимо, при даному відношенні сигнал-шум сигнал неможливо виявити у суміші.

Увага! Для варіанту 8 на графік виводиться **Ngraf = 139** відліків. Значення параметру **Ngraf** виводиться в командному вікні. **Занотуйте ваше значення Ngraf для звіту!**

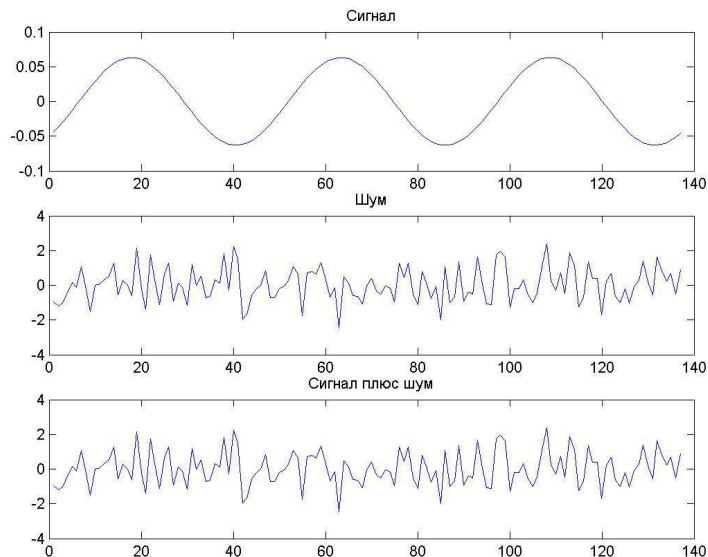


Рис.1

Покажемо тепер, що кореляційний аналіз випадкового процесу допомагає вирішити задачу виявлення періодичного сигналу на тлі шуму.

Оскільки складові частини процесу $Y(t)$ статистично незалежні,

$$K_Y(\tau) = K_S(\tau) + K_\xi(\tau), \quad (2)$$

де

$$K_S(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau; \quad K_\xi(\tau) = D_\xi \frac{\sin 2\pi B \tau}{2\pi B \tau}, \quad (3)$$

B - верхня гранична частота шуму $\xi(t)$.

Контрольне запитання: доведіть справедливості співвідношень (2) та (3).

Побудуємо графіки кореляційних функцій (2)-(3).

Дискретизуючи функції (3) з кроком $\Delta t = 1/2B$, маємо:

$$K_S(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos\left(\frac{\pi f_0}{B} i\right); \quad K_\xi(\tau) = D_\xi \frac{\sin \pi i}{\pi i}$$

==== графіки корел. функцій ====

```
%
j = i; % відліки аргументу ф-ції кор-ції
Ks = A^2/2*cos(pi*f0B*j); % ф-ція корел. сигналу
Kksi = sinc(j); % ф-ція корел. шуму
Ky = Ks + Kksi; % ф-ція корел. суміші
figure;
subplot(3,1,1); plot(i,Ks); % графік кор.ф-ції сигналу
title('Кор.ф. сигналу');
subplot(3,1,2); plot(i,Kksi); % графік кор.ф-ції шуму
title('Кор.ф. шуму');
subplot(3,1,3); plot(i,Ky); % графік кор.ф-ції суміші
```

title('Кор.ф. суміші');

На рис.2 показано графіки кореляційних функцій.

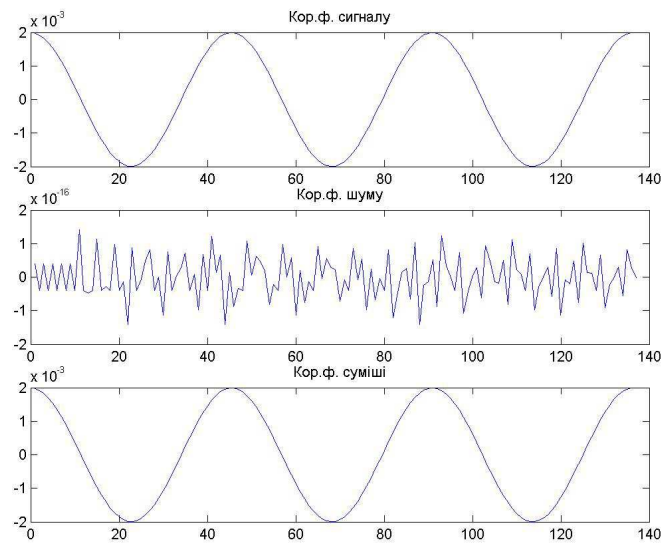


Рис.2

Як видно із співвідношень (2)-(3) та рис.2, форма кореляційної функції процесу $Y(t)$ для $\tau \geq 1/2B$ практично не відрізняється від форми гармонічного сигналу $S(t)$. Цей факт дозволяє по частоті нуль-перетинів оцінити частоту f_0 . Зрозуміло, що такий спосіб оцінювання f_0 має сенс застосовувати при малих відношеннях сигнал-шум $\rho_{\text{сх}}$, коли сигнал практично повністю маскується шумом.

На практиці можна лише оцінити функцію кореляції. Тому, звісно, результати виявлення гармонічного сигналу на фоні шуму будуть не такими гарними. Структурну схему корелометра показано на рис.3.

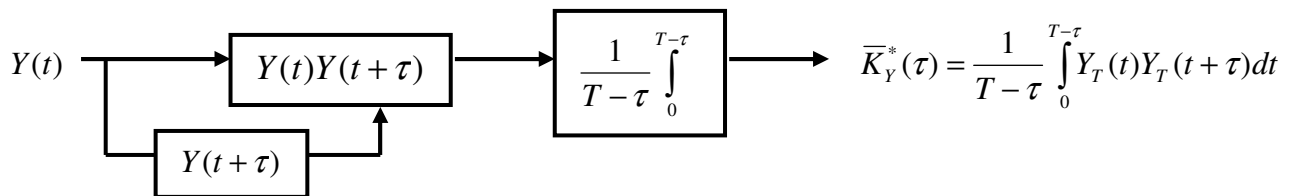


Рис.3

Для відрізка $Y_T(t)$ процесу $Y(t)$ незміщена оцінка функції кореляції має вигляд:

$$\bar{K}_Y^*(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} Y_T(t)Y_T(t+\tau)dt \quad (4)$$

Як показано у Доданку 2, корелометр здатний підвищувати відношення сигнал-шум – тим більше, чим більше некорельованих відліків шуму N міститься у реалізації процесу, що аналізується. Формула для обчислення N для заданих вхідного та вихідного відношень сигнал-шум має вигляд (див. Доданок 2):

$$N = 10^{0.1(\rho_{\text{вих}} - 2\rho_{\text{вх}} + 10\lg 2)}$$

Відповідна програма обчислення N має вигляд:

```
%==== обчислен. N, що забезпечує Rvyh=10 дБ =====
%
Rvyh=10;
N = 10^(0.1*(Rvyh-2*Rvh+10*log10(2)))
```

В результаті обчислень одержуємо $N = 50238$ (Увага! Це значення має місце тільки для 8-го варіанту!)

Нарешті змодельємо процедуру обробки сигналу $Y_T(t)$ корелометром.

```
%===== моделюван. корел. обробки суміші сигналу с шумом =====
%
figure;
N=ceil(N);
i = 1:N;
S = A*cos(pi*f0B*i+fi);      % N відліків сигналу
ksi = randn(1,N);            % N відліків шуму
Sksi = S + ksi;              % N відліків суміші
[K_y,tau] = xcorr(Sksi,Ngraf,'unbiased'); % Ngraf*2+1 значень функц.коррел.
subplot(2,1,1); plot(tau,K_y); % график оцінки функції корел.
title('Оцінка функції корел.суміші');
subplot(2,1,2); plot(tau(Ngraf+2: 2*Ngraf+1),K_y(Ngraf+2: 2*Ngraf+1)); % фрагмент графіка
title('Фрагмент оцінки (додатні затримки)');
```

На рис.4 показано графіки оцінки функції кореляції (тобто, графіки сигналу на виході корелометра).

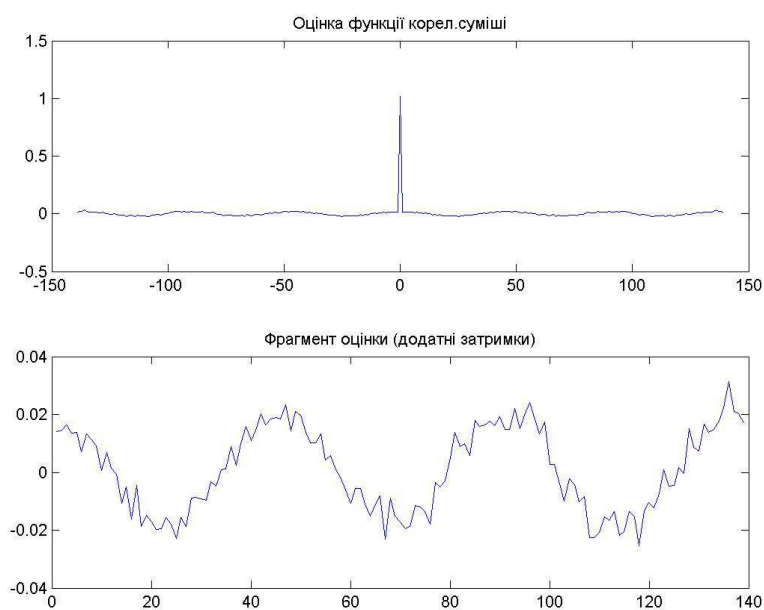


Рис.4

3. Експериментальні вимірювання частоти основного тону голосового сигналу

Планування таких вимірювань базується на такій апіорній інформації:

- 1) частота основного тону голосу людини знаходиться в межах 60-280 Гц;
- 2) для якісної передачі голосового сигналу достатньо використовувати смугу частот 20 Гц – 5 кГц.

Настроюємо комп'ютер на режим запису голосового сигналу з мікрофону:

- 1) подвійним натисненням правою кнопкою миші іконки “гучність” визиваємо на екран вікно мікшеру;
- 2) в меню натискаємо “Параметри” – з’являється вікно “Властивості”;
- 3) натискаємо радіокнопку “запис” та слідкуємо, щоб позиція “мікрофон” була активною;
- 4) вікно мікшера трансформується для режиму запису – активуйте позицію “мікрофон”.

Перевіряємо працездатність системи запису звуку:

- 1) в меню “Програми” > “Стандартні” > ”Розваги” > ”Звукозапис” – активуємо програму запису звуку;
- 2) за допомогою телефонної гарнітури перевіряємо здатність комп’ютерної системи записувати та відтворювати звук

Використовуючи телефонну гарнітуру та програму Matlab, вводимо голосовий сигнал в комп’ютер:

```
% ===== запис акустичного сигналу =====
%
Y = wavrecord(15000); % частота дискретизації 11025 Гц
```

Проконтролюйте на слух результат запису:

```
% ===== прослуховуван. акустичного сигналу =====
%
wavplay(Y);
```

Активуйте програму **sptool**:

```
% ===== активац. програми sptool =====
%
sptool
```

Проаналізуйте записаний сигнал та знайдіть границі найдовшого голосного звуку:

- 1) імпортуйте сигнал **Y(t)** в робочий простір програми **sptool**;
- 2) в зоні **Signals** натисніть кнопку **View** – в результаті з'явиться вікно **Signal Browser** із графіком сигналу **Y(t)**;
- 3) розмістіть вертикальні маркери на границях найдовшого голосного сигналу, як показано на рис.5, та запишіть координати цих маркерів – на рис.5 маємо **t1 = 0.816**, **t2 = 1.018**

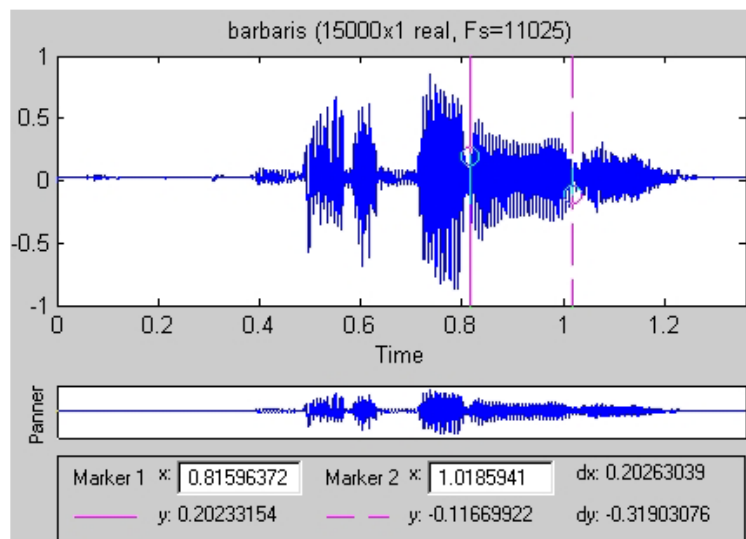


Рис.5

Сформуйте масив чисел **Y1** із виділеного фрагменту :

```
% ===== формуван.фрагменту (голосний звук) =====
%
Fs = 11025; % частот дискретиз.
t1 = 0.816; t2 = 1.018; % границі фрагменту
j1 = ceil(t1*Fs); j2 = ceil(t2*Fs); % номери відліків границь фрагменту
Y1 = Y(j1:j2); % масив відліків фрагменту
```

Імпортуйте масив **Y1** в простір програми **sptool** та проаналізуйте одержаний фрагмент:

- 1) в процесі імпортування масиву **Y1** привласніть йому ім'я – в даному варіанті це **barbaris_frag**;
- 2) в зоні **Signals** натисніть кнопку **View** – у вікні **Signal Browser** з'явиться зображення графіку виділеного фрагменту сигналу (рис.6);
- 3) за допомогою вертикальних маркерів виміряйте найнижчий період коливань сигналу та підрахуйте, якій частоті він відповідає; в даному варіанті одержуємо частоту **136 Гц** – це і є оцінка частоти основного тону голосового сигналу.

Контрольні запитання: 1) чому в даному випадку ми говоримо “оцінка частоти”, а не “частота”?; 2) які труднощі мають місце при такому способі вимірювання частоти основного тону?

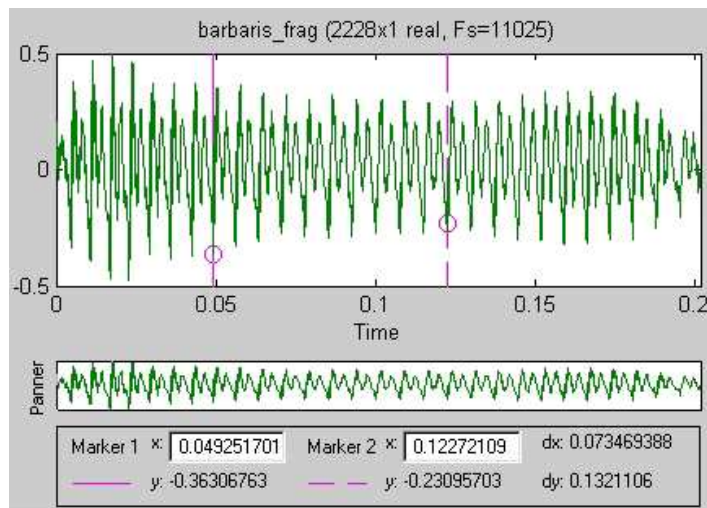


Рис.6

Здійсніть автокореляційний аналіз виділеного фрагменту та оцініть частоту основного тону:

% ===== корел. аналіз голосного звуку =====

%

[Kzvuk,lags] = xcorr(Y1,400);

Результат обчислення кореляційної функції знову доцільно імпортувати в середовище **sptool**, та провести вимірювання за допомогою вертикальних маркерів (рис.7).

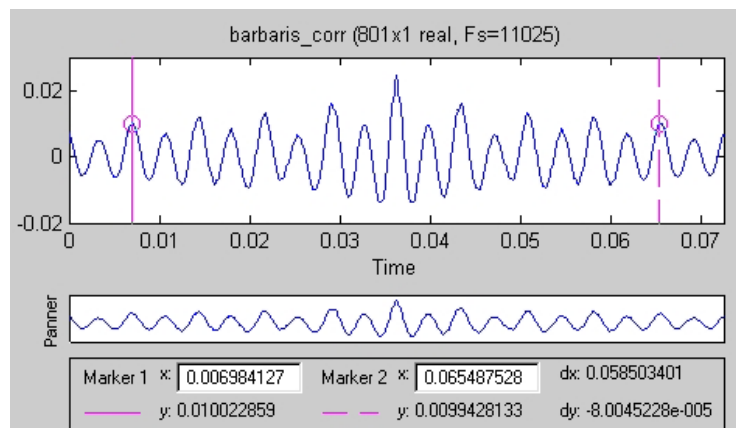


Рис.7

В результаті таких вимірювань одержуємо оцінку частоти основного тону: **137 Гц**.

Контрольні запитання: 1) чому оцінка функції кореляції більш "гладка", порівняно із формою фрагменту сигналу на рис.6?; 2) які труднощі мають місце при такому способі вимірювання частоти основного тону?

4. Підготовка до наступної лабораторної роботи

Знаходячись в середовищі програми **sptool**, експортуйте на диск акустичний сигнал та його фрагмент. Результат експорту – 2 файли із розширенням **.mat** (наприклад, у варіанті 8 – це файли **barbaris.mat** та **barbaris_frag.mat**).

Ці два файли дуже важливі – вони вам знадобляться при проведенні наступної лабораторної роботи.

Додаток 2

Стислі теоретичні відомості

Для адитивної суміші сигналу й шуму (1) маємо:

$$\overline{K}_Y^*(\tau) = \overline{K}_S^*(\tau) + \overline{K}_\xi^*(\tau) + \overline{K}_{S\xi}^*(\tau) + \overline{K}_{\xi S}^*(\tau). \quad (5)$$

Контрольне запитання: доведіть справедливості співвідношення (5).

Для статистично незалежних сигналу й шуму математичне чекання оцінки (5) має вигляд:

$$\langle \bar{K}_Y^*(\tau) \rangle = K_Y(\tau) = K_S(\tau) + K_\xi(\tau). \quad (6)$$

Контрольне запитання: доведіть справедливність співвідношення (6).

При $\tau_\kappa < \tau \ll T$ маємо:

$$\langle \bar{K}_Y^*(\tau) \rangle = K_Y(\tau) \approx K_S(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau. \quad (7)$$

Контрольне запитання: поясніть можливість такого спрощення.

Розглянемо тепер дисперсію оцінки (5):

$$\begin{aligned} D[\bar{K}_Y^*(\tau)] &= D[\bar{K}_S^*(\tau)] + D[\bar{K}_\xi^*(\tau)] + D[\bar{K}_{S\xi}^*(\tau)] + D[\bar{K}_{\xi S}^*(\tau)] + \\ &+ 2D_{\bar{K}_S^* \bar{K}_\xi^*} + 2D_{\bar{K}_S^* \bar{K}_{S\xi}^*} + 2D_{\bar{K}_S^* \bar{K}_{\xi S}^*} + 2D_{\bar{K}_\xi^* \bar{K}_{S\xi}^*} + 2D_{\bar{K}_\xi^* \bar{K}_{\xi S}^*} + 2D_{\bar{K}_{S\xi}^* \bar{K}_{\xi S}^*} \end{aligned} \quad (8)$$

Після громіздких, хоч і нескладних, викладок одержуємо:

$$D[\bar{K}_Y^*(\tau_0)] \approx \frac{A^4}{4T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \cos 2\omega_0 \tau d\tau + \frac{D_\xi^2}{T/2\tau_{\kappa.кв}} + \frac{D_\xi A^2/2}{T/2\tau_\kappa} (2 + \cos 2\omega_0 \tau_0), \quad (9)$$

тобто ненульовий внесок забезпечують доданки $D[\bar{K}_\xi^*(\tau)]$, $D[\bar{K}_S^*(\tau)]$ та $D_{\bar{K}_S^* \bar{K}_{S\xi}^*}$.

Підставляючи $\rho_{\text{вх}} = \frac{A^2/2}{D_\xi}$ в (9), маємо:

$$D[\bar{K}_Y^*(\tau_0)] \approx \frac{D_\xi^2 \rho_{\text{вх}}^2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \cos 2\omega_0 \tau d\tau + \frac{1}{\rho_{\text{вх}}^2} \cdot \frac{A^4/4}{T/2\tau_{\kappa.кв}} + \rho_{\text{вх}} \cdot \frac{D_\xi^2}{T/2\tau_\kappa} (2 + \cos 2\omega_0 \tau_0) \quad (9a)$$

Неважко бачити, що для малих значень вхідного відношення сигнал-шум, тобто для $\rho_{\text{вх}} \ll 1$, найбільш цікавих для дослідження, найбільший внесок в дисперсію оцінки функції кореляції робить доданок $D[\bar{K}_\xi^*(\tau)]$, тобто

$$D[\bar{K}_Y^*(\tau)] \approx D[\bar{K}_\xi^*(\tau)] \approx \frac{2D_\xi^2}{T} \tau_{\kappa.кв} = \frac{1}{\rho_{\text{вх}}^2} \cdot \frac{A^4/4}{T/2\tau_{\kappa.кв}}. \quad (10)$$

Таким чином, якщо трактувати вираз (7) як сигнал на виході корелометра, а вираз (10) – як потужність шуму на виході корелометра, тоді відношення сигнал-шум на виході корелометра:

$$\rho_{\text{вих}} = \frac{A^4/8}{D[\bar{K}_\xi^*(\tau)]} = \frac{A^4(T/2\tau_{\kappa.кв})}{8D_\xi^2} = \rho_{\text{вх}}^2 \frac{(T/2\tau_{\kappa.кв})}{2} = \rho_{\text{вх}}^2 TB. \quad (11)$$

Позначаючи $T/2\tau_{\kappa.кв} = N$, одержуємо:

$$\rho_{\text{вих}} = \rho_{\text{вх}}^2 \frac{N}{2}. \quad (12)$$

Співвідношення (12) показує, що застосування корелятора дозволяє суттєво підвищити відношення сигнал-шум за рахунок усереднення некорельованих відліків шуму.

Тепер оцінимо об'єм N експериментальної вибірки відліків згенерованої суміші, що потрібний для забезпечення заданого відношення сигнал-шум на виході корелятора.

Переводячи (12) в децибелі:

$$\rho_{\text{вих дб}} = 10 \lg \left(\rho_{\text{вх}}^2 \frac{N}{2} \right) = 2\rho_{\text{вх дб}} + 10 \lg N - 10 \lg 2,$$

звідки одержуємо:

$$N = 10^{0.1(\rho_{\text{вих}} - 2\rho_{\text{вх}} + 10 \lg 2)} \quad (13)$$

Формула (13) надзвичайно корисна для планування експерименту: вона дозволяє обчислити об'єм вибірки відліків процесу $Y(t)$ для заданих вхідного та вихідного відношень сигнал-шум.